

# NOTIONS D'ARITHMETIQUE

## Chapitre 2

### Multiple

- **Définition** :  $a$  et  $b$  sont deux entiers. On dit que  $a$  est un multiple de  $b$  s'il existe un nombre  $k$  tel que  $a = b \times k$ .

Ex : 78 est un multiple de 13 car  $78 = 13 \times 6$

5 n'est pas un multiple de 2 car  $2 \times 2,5 = 5$  mais 2,5 n'est pas un nombre entier.

### Diviseur

- **Définition** : on dit que  $b$  divise  $a$  si  $a$  est multiple de  $b$ .

Ex : 8 et 4  $\rightarrow 2 \times 4 = 8$  donc 8 est un multiple de 4 ou bien 4 divise 8

### Nombre premier

- **Définition** : tout nombre entier différent de 1 dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même est appelé nombre premier.

Ex : 5 est un nombre premier mais pas 9 car il possède un diviseur non trivial, le 3. (un diviseur non trivial d'un entier naturel  $n$  est un entier naturel diviseur de  $n$  mais distinct de  $n$  et de 1)

- **Liste des diviseurs premiers  $> 50$**  : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; ...

## Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

- **Définition** : tout nombre entier  $n$  est égal au produit de nombres premiers affectés d'une certaine puissance. Cette décomposition est unique.

$$\begin{aligned}\text{Ex : } 240 &= 24 \times 10 = 6 \times 4 \times 5 \times 2 \\ &= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2 \\ &= 2^4 \times 3 \times 5\end{aligned}$$

|     |   |                                                           |
|-----|---|-----------------------------------------------------------|
| 240 | 2 | --> on commence par 2 car on suit l'ordre des nb premiers |
| 120 | 2 |                                                           |
| 60  | 2 |                                                           |
| 30  | 2 |                                                           |
| 15  | 3 |                                                           |
| 5   | 5 | --> $2^4 \times 3 \times 5 = 240$                         |

## Critères de divisibilité

- **Par 2** :  $n$  est divisible par 2 ssi (si et seulement si) le chiffre des unités se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8. On dit que  $n$  est pair. Les nombres non divisibles par 2 sont appelés les entiers impairs.

- **Par 3** :  $n$  est divisible par 3 si la somme des chiffres est elle-même divisible par 3.

Ex :  $477 = 4 + 7 + 7 = 18$  ;  $1 + 8 = 9$  --> 9 est divisible par 3 donc 477 également

- **Par 4** :  $n$  est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres se divise par 4.

Ex : 45822 ne se divise pas par 4 car 22 n'est pas un multiple de 4.

- **Par 5** :  $n$  est divisible par 5 si son chiffre des unités se termine par 0 ou 5.

- **Par 9** :  $n$  est divisible par 9 si la somme des chiffres du nombre est elle-même divisible par 9.

Ex :  $855 = 8 + 5 + 5 = 18$  ;  $1 + 8 = 9$  donc 855 est divisible par 9

- **Par 11** :  $n$  est divisible par 11 ssi en calculant la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair, la différence entre les deux sommes est nulle ou si elle est égale à un multiple de 11. Alors, le nombre est lui-même multiple de 11.

Ex : 16291 --> somme des chiffres de rang pair :  $6 + 9 = 15$  ; somme des chiffres de rang impair :  $1 + 2 + 2 = 4$  -->  $15 - 4 = 11$ . 11 est multiple de 11 donc 16291 également.

- **Par 25** :  $n$  est divisible par 25 si le nombre se termine par 00, 25, 50 ou 75.

### Nombres premiers entre eux

- **Définition** : deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteur premier en commun, et donc, aucun diviseur en commun.

Ex : 78 et 35 -->  $78 = 2 \times 3 \times 13$  ;  $35 = 5 \times 7$  donc 78 et 35 sont premiers entre eux.

### PGCD

- **Définition** : Le PGCD de deux nombres entiers  $a$  et  $b$  est le plus grand nombre entier divisant à la fois  $a$  et  $b$ .

- **Méthode** : On conserve les facteurs premiers communs, on conserve l'exposant le plus petit.

Ex : PGCD (15 ; 12) = 3

PGCD (80 ; 300) = 20 -->  $80 = 2^4 \times 5$  ;  $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

## PPCM

- **Définition** : Le PPCM de deux nombres entiers a et b non nuls est le plus petit nombre entier non nul qui est à la fois multiple de a et de b.

- **Méthode** : on garde tous les facteurs qui apparaissent dans au moins l'un des deux nombres et pour chaque facteur on garde l'exposant le plus grand.

Ex : PPCM (80 ; 300) = 1200 -->  $80 = 2^4 \times 5$  ;  $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

## Diviseurs

Ensemble des diviseurs de 200, soit  $3 \times 4$  --> 3 car  $5^0, 5^1, 5^2$  et 4 car  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

| $5^0$ | $5^1$ | $5^2$ |       |
|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 5     | 25    | $2^0$ |
| 2     | 10    | 50    | $2^1$ |
| 4     | 20    | 100   | $2^2$ |
| 8     | 40    | 200   | $2^3$ |

- **Propriété** : Un nombre de la forme  $2^n \times 5^m$  possède  $(n+1) (m+1)$  diviseurs.

Ex :  $2000 = 5^3 \times 2^4$  --> 2000 possède  $(3+1) (4+1) = 4 \times 5 = 20$  diviseurs.